UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE ESTUDIOS SUPERIORES ACATLÁN

MATEMÁTICAS APLICADAS Y COMPUTACIÓN

ECUACIONES DIFERENCIALES II

ANÁLISIS DEL AUMENTO EN EL NÚMERO DE SELACIOS CAPTURADOS EN EL MAR ADRIÁTICO DURANTE LA PRIMERA GUERRA MUNDIAL MEDIANTE SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

PRESENTAN:

Altamirano Guadarrama Rafael Neftalí
Rogerio Romero Juan Carlos
Sánchez Santillán Mariana
Lecona Martínez Augusto
Virgilio Aguilar Marisol

PROFESOR:
HERNÁNDEZ ORTEGA CARLOS

Jueves 20 Mayo de 2010

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCION:

Los seres orgánicos tienden a incrementarse con rapidez, motivo por el que de manera inevitable siempre hay una batalla por la existencia ya sea un individuo con otro de su misma especie o con los de alguna especie diferente o bien con las condiciones físicas de la vida. La cantidad de alimento para cada especie da el límite extremo al que se puede aumentar cada una; pero muy a menudo no solo la obtención de alimento si no servir de presa a otros animales es lo que determina el número promedio de una especie.(Darwin,1882)

Los modelos de ecosistemas resultan interesantes y útiles, tanto desde el punto de vista teórico como práctico. La mayor parte de los estudios relativos a este asunto se centran en el desarrollo de herramientas que permitan predecir la evolución futura de los ecosistemas sometidos a ciertas condiciones, con el fin de introducir técnicas de control en los mismos (Volterra, 1931), (Lotka, 1952), (Dempster, 1975), (Braum, 1983). Tal es el caso del control biológico de plagas, es decir, el control de una especie que crece descontroladamente en un entorno o ecosistema para evitar que provoque daños colaterales. Ello como alternativa a las técnicas de control químico.

En este trabajo se analiza por medio de un modelo matemático de sistemas de ecuaciones diferenciales Lotka-Volterra el efecto de la caza indiscriminada en el mar Adriático en la población de Selacios [I] (tiburones, mantarrayas, tintorera, etc.) durante la Primera Guerra Mundial

[I] *"Se dice de los peces marinos cartilagíneos que tienen cuerpo fusiforme o deprimido, cola heterocerca, piel muy áspera, boca casi semicircular con numerosos dientes triangulares y de bordes cortantes o aserrados y mandíbula inferior móvil y varias hendiduras branquiales" (Real Academia Española).*

ANTECEDENTES

2.1. Ley Malthusiana

Para conocer como evoluciona la población de una determinada especie, incluyendo la humana, a lo largo de la historia se han considerado varios modelos. Uno de ellos, conocido como la ***Ley malthusiana***[II], que plantea el problema que representaba el creciente desequilibrio entre el incremento de la población y el crecimiento de los satisfactores de ésta. Malthus proponía que la razón de cambio de una población era proporcional a la población existente, es decir, si la variable x representaba la población en cualquier instante t, donde t representa el tiempo, entonces se tiene

$\frac{dx}{dt} = kx$ donde k es la constante de proporcionalidad……………………..(1)

La ecuación (1) es el primer modelo para el crecimiento de poblaciones; que corresponde a una ecuación diferencial de variables separables y cuyo proceso de solución es:

$$\frac{dx}{x} = kdt \quad \rightarrow \quad \int \frac{dx}{x} = \int kdt \quad \rightarrow \quad \ln x = kt + c \quad ;$$

que puede escribir como $x(t) = ce^{kt}$ ……………………………..…………….(2)

Conviene señalar que la ecuación (2) sólo se cumple para ciertas especies y por periodos determinados de tiempo. Así, la Ley malthusiana es errónea para calcular el crecimiento de la población de especies cuando el periodo de tiempo es grande, pues no considera factores tales como la extensión del hábitat, las epidemias, disponibilidad de alimentos, etc. Cuando se incorporan al modelo malthusiano limitaciones tales como el espacio para convivencia o la producción de alimentos, sólo por señalar algunas variables, evidentemente la ecuación diferencial cambia.

Consideremos una vez más la ecuación propuesta por Malthus y consideremos que la constante k puede interpretarse como la diferencia entre los índices de natalidad y mortalidad a y b, respectivamente y que son funciones que dependen de la población. Por lo que la ecuación (1) puede reescribirse como

---

[II] *Propuesta por el economista inglès Thomas Robert Malthus en 1978 en su obra "An essay on the Principle of Population".*

$$\frac{dx}{dt} = (a-b)x \qquad \text{..(3)}$$

2. 2. Ecuación Logística y función de Gompertz

Si por razones o motivos tales como la extinción de especies, se considera que el índice de natalidad se puede modelar con una función lineal decreciente, entonces se puede proponer: $a = a_0 - a_1 x$ y sustituyendo en (3) tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = (a_0 - a_1 x - b)x = (a_0 - b)x - a_1 x^2$$

Renombrando la diferencia de $a_0 - b$ con una nueva variable tal que $a_0 - b = \mathrm{K}$ y haciendo $a_1 = \phi$, se obtiene otro modelo, llamado ***logístico*** [III] y que es muy usual para describir la razón de cambio, siendo ésta

$$\frac{dx}{dt} = \mathrm{K}x - \phi x^2 \ ;$$

que puede tratarse como una ecuación diferencial de variables separadas o como Bernoulli.

En la década de 1930, el biologo G. F. Gauze realizó un experimento con el protozoario *Paramecium* y usó una ecuación logística para modelar sus datos con resultados sorprendentes ya que la población de protozoarios se comporta de manera muy similar a las predicciones del modelo.

La ecuación de Malthus y el modelo logístico no son las únicas ecuaciones propuestas para modelar el crecimiento de poblaciones, también existen modelos como la ***función del crecimiento de Gompertz*** y modelos de crecimiento dependiente de las estaciones como la ecuación (4) para modelar cambios provocados por las estaciones en la disponibilidad del alimento, nótese que las funciones periódicas son los elementos necesarios para modelar este tipo de comportamientos.

$$\frac{dP}{dt} = kP\cos(at - \phi) \qquad \text{..(4)}$$

[III] *La ecuación diferencial logística fue propuesta por el biólogo matemático holandes Verhulst, como un modelo para el crecimiento de la población mundial en la década de 1840.*

DESARROLLO

3. 1. La investigación de D´Ancona

En 1926 Humberto D'Ancona, un biólogo italiano, completó un estudio estadístico de las poblaciones cambiantes de varias especies de peces de las orillas del norte del mar Adriático. Su estimación de las poblaciones durante el periodo que va de 1910 a 1923 se basó en el número de cada especie vendido en el puerto de Fiume, Italia. D'Ancona supuso, al igual que nosotros, que los números de varias especies en los mercados reflejaban la abundancia relativa de las especies en el Adriático. En la tabla 1 se muestran los datos.

Puerto/Año	1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
Fiume	12%	21%	22%	21%	36%	27%	16%	16%	15%	11%

Tabla 1 Porcentaje de selacios respecto al total de la pesca

Como suele suceder, los datos no brindaron un apoyo abrumador para alguna teoría específica de poblaciones cambiante de peces. Sin embargo, D'Ancona observó que los porcentajes de especies depredadoras fueron por lo general mayores durante e inmediatamente después de la Primera Guerra Mundial. La pesca se redujo de forma considerable durante la guerra debido a que los pescadores dejaron sus redes para pelear; D'Ancona concluyó que la reducción de la pesca dio lugar al cambio en las proporciones depredador-presa. Formuló la hipótesis de que durante la guerra la comunidad depredador-presa se aproximó a su estado natural de una proporción relativamente alta de peces depredadores, en tanto que la pesca más intensa de los años de la preguerra y la posguerra perturbaron el equilibrio a favor de las presas. Incapaz de explicar el fenómeno, D'Ancona preguntó a su suegro, el matemático Vito Volterra (1860-1940), si había un modelo matemático que pudiera aclarar la cuestión. En unos meses Volterra describió una serie de modelos para las interacciones de dos o más especies.

3. 2. Modelo depredador-presa (Lotka-Volterra)

El modelo más simple de la asociación depredador-presa sólo incluye el desarrollo o el deterioro natural y la interacción entre depredador y presa. Se supone que las demás relaciones son insignificantes. Volterra inició su análisis separando a la población de selacios (depredadores), de los peces comestibles (presas): el población de presas $x(t)$ y la población

de depredadores $y(t)$. Su razonamiento fue entonces que los peces comestibles no compiten muy intensamente entre sí por su alimento, ya que este es muy abundante y la población de peces no es muy densa. Por ello en ausencia de selacios, los peces comestibles crecerían de acuerdo a la Ley Malthusiana $\frac{dx}{dt} = kx$. Además la interacción entre depredadores y presas se modela por los términos de acción de masas proporcional al producto de las dos poblaciones axy siendo perjudicial para las presas; así que la población de peces comestibles en el tiempo t está dada por:

$$\frac{dx}{dt} = kx - axy$$

también concluyo que los depredadores tenían una tasa natural de decrecimiento $-by$, proporcional a su número, y que su incremento tenía una tasa cxy,proporcional también a su número, y al suministro de alimento x; de esta forma la población de selacios en el tiempo t está dada por:

$$\frac{dy}{dt} = -by + cxy.$$

De modo que el sistema de ecuaciones diferenciales El modelo para las poblaciones de depredadores y presas es el sistema depredador-presa (o tambien sistema llamado Lotka-Volterra[IV])

:

$$\frac{dx}{dt} = kx - axy \quad \wedge \quad \frac{dy}{dt} = -by + cxy \quad \text{...(5)}$$

describe la interacción entre los selacios y los peces comestibles en el caso de no haber pesca alguna. A continuación se estudiará este sistema y se obtendrán algunas propiedades interesantes de sus soluciones. Después, se incluirá en el modelo el efecto de la pesca y se mostrará que un bajo nivel de la captura es más benéfico para los selacios que para las especies comestibles. De hecho, se llegará al sorprendente resultado de que un bajo nivel de pesca, en realidad, es dañino para los peces comestibles.

[IV] *Volterra escribió "LesÇons sur la théorie mathématique de la lute pour la vie" relacionado con sus teorías en 1931. A. J. Lotka, un biólogo estadounidense que después fue actuario, llegó de forma independiente a muchas de las conclusiones de Volterra; véase su libro,"Elements of Physical Biology"(1952).*

3. 3. Leyes de Volterra

Volterra resumió sus conclusiones acerca de las soluciones y órbitas del sistema (5) en forma de tres leyes. Supóngase que k,a,b,c son constantes positivas.

3. 3. 1. Ley del Ciclo Periódico

Ley del ciclo periódico. Las fluctuaciones de las poblaciones del depredador y su presa son periódicas. El periodo depende de los valores de los coeficientes de la tasa de cambio del sistema (5) y de los datos iniciales. Además, aumenta con la amplitud del ciclo correspondiente.

Por lo tanto lo que tenemos que hacer es mostrar que el sistema (5) tiene una solución periódica. Es decir, existe una constante T tal que x(t)= x(t + T) y y(t)= (t + T) para toda t.

A continuación se explica el proceso llevado a cabo para encontrar una ecuación para las orbitas del sistema:

Se divide la primera ecuación de tasa de cambio del sistema (5) entre la segunda y se obtiene

$$\frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{kx - axy}{-by + cxy} = \frac{kx}{-by + cxy} - \frac{axy}{-by + cxy} = \frac{kx}{y(-b + cx)} - \frac{axy}{y(-b + cx)}$$

De donde después de simplificar el lado izquierdo y factorizar el término derecho nos queda que:

$$\frac{dx}{dy} = (\frac{x}{-b + cx})(\frac{k}{y} - a)$$

Al separar las variables tenemos:

$$(\frac{-b + cx}{x})dx = (\frac{k}{y} - a)dy \quad \rightarrow \quad \frac{-b}{x}dx + cdx = \frac{k}{y}dy - ady$$

Integrando ambos miembros de la ecuación y pasando todos los términos del lado derecho y multiplicando ambos miembros por (-1) tenemos:

$$-b\int\frac{dx}{x} + c\int dx = k\int\frac{dy}{y} - a\int dy \quad \rightarrow \quad (b\ln x - cx) + (k\ln y - ay) = C$$

Donde C es una constante de integración.

Elevando e a cada uno de los dos miembros

$e^{b\ln x - cx + k\ln y - ay} = e^{c}$ por la propiedad $e^{A+B} = e^{A}e^{B}$ y proponiendo C= e^{c}

$e^{b\ln x - cx}e^{k\ln y - ay} = C$ por la propiedad $c\ln x = (\ln x)^{c}$ obtenemos

$$e^{(\ln x)^c - cx} e^{(\ln y)^k - ay} = C$$ por propiedad $e^{\ln x} = x$

$$(x^c e^{-cx})(y^k e^{-ay}) = C \quad \text{...(6)}$$

La formula (6) define una curva cerrada simple(es decir, un ciclo) para cada (X0,Y0) dentro del cuadrante de población lo que significa que la solución correspondiente
x=x(t) & y= (y) del sistema es periódica.(véase Ilustración 1).

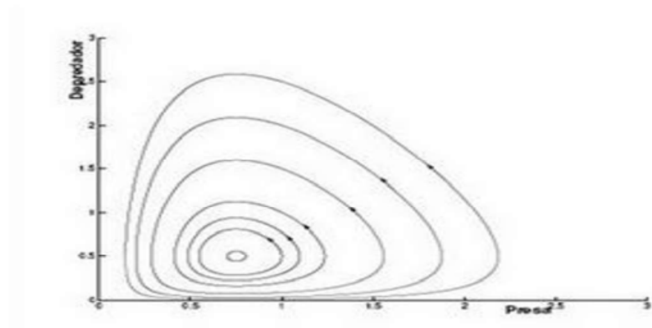


Ilustración 1 Plano Fase

De manera notable, la población promedio de cada especie en cualquiera de los ciclos es una constante fija. Ésta es la segunda ley de Volterra.

3. 3. 2. Ley de los Promedios

Ley de los promedios. En el sistema (5), las poblaciones promedio de depredador y presa durante un ciclo son, respectivamente, b/c y k/a

Veamos por qué se cumple la ley de los promedios. Supóngase que x=x(t), y=y(t) es una solución no constante que define un ciclo de periodo T. Las poblaciones promedio $\bar{x}$ y $\bar{y}$ durante un periodo se definen como

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt \qquad \wedge \qquad \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)dt,$$

Demostraremos que $\bar{x} = \frac{b}{c}$. Primero se reordenan los términos de la segunda ecuación de tasa de cambio de (5) para obtener:

$\frac{y'}{y} = b + cx \quad \rightarrow$ despejando x tenemos que: $x(t) = \frac{b}{c} - \frac{1}{c}\frac{y'}{y}$ ....(7)

Luego integramos cada miembro de (7) de 0 a T

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{b}{c}dt - \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{c}\frac{y'}{y}dt = \frac{b}{c} - \frac{1}{T}\frac{\ln y(T) - \ln y(0)}{c} = \frac{b}{c}$$

Lo anterior es posible debido a que y(T)=y(0). Con un argumento similar se demuestra que $\bar{y} = k / a$ y de esta manera queda demostrada la validez de la ley de los promedios.

La ley de los promedios nos acerca más a los datos reales antes mencionados para la captura de peces, ya que tales datos consisten en promedios. Sin embargo, aún no se toma en cuenta a los pescadores.

Por qué la captura daña al depredador y ayuda a la presa

La tercera ley de Volterra explica qué sucede cuando son capturadas dos especies. El modelo más simple es el de captura de esfuerzo constante, en el que la cantidad capturada por unidad de tiempo es proporcional a la población.

$$\frac{dx}{dt} = kx - axy - H_1 x = (k - H_1 - ay)x \qquad \text{...(8)}$$

$$\frac{dy}{dt} = -by + cxy - H_2 y = (-b - H_2 + cx)y$$

Los números negativos H1 y H2 son los coeficientes de captura. Cuando hay captura, el punto de equilibrio que está dentro del cuadrante de población se desplaza a la izquierda y hacia arriba a partir de x=b/c, y=k/a al punto

$$x = (b + H_2)/c \qquad\qquad y = (k - H_1)/a$$

Se supone que H2< c. De otro modo, la captura intensa de la presa x no deja suficiente alimento para el depredador y, por consiguiente, esta especie tiende a la extinción. Por la ley de los promedios, los que corresponden a la población alrededor de cualquier ciclo están dados por

las coordenadas del punto de equilibrio. Puesto que la captura provoca que el punto de equilibrio se mueva hacia arriba y a la izquierda de la posición original en el cuadrante de población, la captura aumenta el promedio de la población de presas pero disminuye el de la población de depredadores.

3. 3. 3. Ley de Captura

Ley de captura. La captura de esfuerzo constante aumenta el numero promedio de presas por ciclo y disminuye el numero promedio de depredadores

Antes de hacer comparaciones de los datos reales con las predicciones de la ley de Volterra es elemental reformular la ley en términos de porcentajes(como los de la tabla1) en vez de promedios.

3. 3. 4. Ley de Porcentaje de Captura

Ley de porcentaje de captura. La captura de esfuerzo constante aumenta el porcentaje promedio de las presas por ciclo en la población total de peces y disminuye el porcentaje promedio de depredadores por ciclo.

Si los coeficientes de captura en el sistema (8) son demasiado grandes, el punto de equilibrio interno $(b+H_2)/c,(k-H_1)/a$ corta el eje x positivo y se extingue una o ambas especies.

Con la ley de porcentaje de captura de Volterra se responde la pregunta de D'Ancona. Una disminución en la tasa de captura da lugar a un incremento en el porcentaje de depredadores. (Véase la tabla 1). Cuando la tasa de captura disminuyó durante los años de la guerra y luego aumentó durante la posguerra, el porcentaje de depredadores aumentó y luego disminuyó , justo como predice el modelo de Volterra.

Validez de la ley de captura de Volterra

Desde su formulación, en muchas ocasiones el modelo de Volterra se ha puesto a prueba y recibido apoyo, pero continúa siendo el punto de partida para muchos intentos serios de entender cómo evolucionan las comunidades de depredadores y presas con o sin captura.

Una confirmación impresionante de la validez general de la ley de captura de Volterra ocurrió cuando se aplicó el insecticida DDT[V] para controlar un hemíptero que infestó los huertos de cítricos en Estados Unidos de América. El insecto fue traído accidentalmente de Australia en 1868. La cantidad de estos insectos fue controlada (pero no eliminada) mediante la importación de su depredador natural, un tipo particular de mariquita. Cuando se introdujo el DDT como agente de "captura", se esperaba que el hemíptero pudiera ser eliminado por completo. Pero el DDT actuó de manera indiscriminada, matando el número de mariquitas, en tanto que aumentó la población de hemípteros, liberados ya de la depredación por parte de las mariquitas.

CONCLUSION

La razón por la que durante la Guerra la tasa de población de las presas disminuyo de manera radical se debe a que no sufrió de caza, generalmente en un entorno en el que el que se cazan presas, se pensaría que disminuye la población de éstas, pero dado que los depredadores dependen de las presas para aumentar su tasa de población y que lo contrario, no sucede ,al haber pocos depredadores por ausencia de alimento las presas aumentan su tasa de población exponencialmente, esto porque la tasa de natalidad de las presas es muy grande por ello la caza de presas daña al depredador y ayuda a la presa.

Como lo expuso Volterra, podemos conjeturar que para un entorno natural (en el que la caza no es un factor a considerar) en ausencia de depredadores, la población de las presas crecería exponencialmente también pero… ¿Pueden subsistir en equilibrio ambas especies?

Obtuvimos que los puntos críticos del sistema son (0,0) y (b/c, k/a), los cuales fueron calculados a partir de la segunda ley de Volterra, y que además hacen a $x' = 0$ y $y' = 0$. El segundo conjunto de puntos críticos fue nuestro mayor interés.

[V] El DDT(Dicloro Difenil Tricloroetano) fue utilizado con intensidad como insecticida, en los últimos años se prohibio su daños a la salud humana

Si el punto de equilibrio del sistema también llamado punto(s) critico(s) queda dentro del cuadrante de población, además, la curva que toca el punto (xo, yo) donde xo y yo son las poblaciones iniciales, esté próxima al punto crítico para un tiempo mayor a cero, importando que en ningún momento las variables xo =0 o yo=0. Mientras más alejado se encuentre un punto cualquiera (xo, yo), del punto de equilibrio no se puede asegurar con facilidad que ambas especies subsistan.

Respecto al tiempo no podemos deducir las ecuaciones para x & y con respecto de t , pero podemos tener una relación de la población de y para cierta población de x ,sabiendo que si en dado momento para cierta población de x se tienen 2 puntos de y es porque provienen de 2 diferentes tiempos, en la realidad podríamos darnos cuenta de alguna manera cada cuanto se repite un periodo para poder establecer a x & y en función del tiempo.

REFERENCIAS

[1] BORRELLI, Robert L; COLEMAN, Courtney S. (2005) “*Ecuaciones diferenciales: una perspectiva de modelación*” (Trad. Juárez, Jazmín).Oxford: Oxford University Press: (original en inglés 2002).

[2] NAGLE, Kent; SAFF, Edward; SNIDER, Arthur. “*Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*” (Trad. Palmas, Oscar Alfredo) (4e. ed). México: Pearson Educación, 2005.

[3] MURRAY, Spiegel R. “*Ecuaciones Diferenciales aplicadas*” (3ª ed.)(Trad. García, Henry).México: Prentice Hall Hispanoamericana, 1983.

[4] BENDER, Edward A. (1991) “*Introduction to Mathematical Modeling*” (cap. 8). Krieger, Nueva York.

[5] DARWIN, Charlie. “*Struggle por Existente*”, The Origin of Species” (6ª. Ed.). Appleton, Nueva York, 1982.

[6] Boyce, William E. and Richard C. DiPrima. “*Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems”*. New York: John Wiley, 1997.

[7] WILKINS, Williams. (1956) “*Elements of Physical Biology*”. Nueva York, 1956.

[8] Morris Hirsch and Stephen Smale, (1983) “*Ecuaciones diferenciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal”*, Alianza Universidad Textos, España.

[9] Braum, Martin. “*Differential Equation Models*” Nueva York, 1983.